203	Séries à termes réels ou complexes: convergence absolue, semi-convergence.	Règle d'Abel, application	Capes

C'est une généralisation du TSSA, que l'on retrouve en posant $v_n = (-1)^n$. Elle s'applique dans tout E Banach.

Prop.6: (CAP) Soient $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $\mathbb{R} \searrow 0$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K,
à sommes partielles bornées, i.e. tq. $\exists M\in\mathbb{R}_+$:
$$\forall n\in\mathbb{N}, \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq M$$
Alors la série $\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n a_n$ converge.

Exemple: (CAP) Pour tous $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, $\alpha\in]0;1]$,
$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\mathrm{i}n\theta}}{n^\alpha}$$ cv.

I. Développement

A. Démo de la règle d'Abel.

Soient $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $\mathbb{R} \searrow 0$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K, à sommes partielles bornées, i.e. tq. $\exists M\in\mathbb{R}_+$: $\forall n\in\mathbb{N}, \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq M$.

Montrons que la série $\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n a_n$ converge.

Remarquons que l'hypothèse $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite $\mathbb{R} \searrow 0$ implique que les ε_n sont positifs.

On va essayer de montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $A_0 = a_0$. Il vient $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $a_p = A_p - A_{p-1}$. Par hypothèse, les $|A_n|$ sont majorés par M.

Exprimons S_n en fonction de A_n : Pour tout n∈ℕ, il vient:

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \varepsilon_p a_p = \varepsilon_0 a_0 + \sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p \left(A_p - A_{p-1}\right)$$

$$= \varepsilon_0 a_0 + \sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p A_p - \sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p A_{p-1}$$ on change les indices en "décalant":

$$= \sum_{p=0}^{n} \varepsilon_p A_p - \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon_{p+1} A_p = \varepsilon_n A_n + \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon_p A_p - \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon_{p+1} A_p$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}\right) A_p + \varepsilon_n A_n$$

Or $|\varepsilon_n A_n| \leq M\varepsilon_n$, où $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n A_n = 0$. (voilà pour le second terme de l'égalité ci-dessus).

Essayons de majorer le premier terme. $\left|\left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}\right) A_p\right| \leq M\left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}\right)$.

Or $\sum_{p=0}^{n-1} \left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}\right) = \varepsilon_0 - \varepsilon_n$ (série télescopique). On a $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, donc $\sum_{p=0}^{n-1} \left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}\right) \to 0$, et d'après la majoration ci-dessus, $\sum_{p=0}^{n-1} \left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}\right) A_p$ est absolument convergente dans K complet, donc convergente.

Finalement, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la série $\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n a_n$ converge.

B. Exemple.

Pour tous $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, $\alpha \in]0;1]$, étudier la cv de la série: $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\mathrm{in}\theta}}{n^\alpha}$.

→ On pose $\varepsilon_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $a_n = e^{in\theta}$. Vérifions que les hypothèses sont remplies:

Il est immédiat que (ε_n) cv ↘ 0.

Mq les sommes partielles A_n de (a_n) sont bornées. $A_n = \sum_{p=1}^{n} e^{ip\theta} = e^{i\theta} \sum_{p=0}^{n-1} \left(e^{i\theta}\right)^p$.

Or $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, donc $e^{i\theta} \neq 1$ (dénominateur≠0), l'écriture du second facteur comme somme partielle de série géométrique est bien définie, et il vient: $A_n = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{i\theta} \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{i\frac{n\theta}{2}} - e^{-i\frac{n\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} . \frac{2i\sin\frac{n\theta}{2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}$.

D'où la majoration: ∀n∈ℕ*, $\left|A_n\right| = \left|\sum_{p=1}^{n} e^{ip\theta}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} = M \in \mathbb{R}_+$.

→ Donc la règle d'Abel s'applique, et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\mathrm{in}\theta}}{n^\alpha}$ converge.

N.B.: Elle n'est pas abs. cv car $\left|\frac{e^{\mathrm{in}\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$, et ceci n'est (Riemann), le terme général d'une série cv que pour α>1.